فصل ۲

سری فوریه

۲-۱- مقدمه

در اوایل قرن هیجدهم، ریاضیدان، مهندس و فیزیکدان فرانسوی جان باپتیست ژوزف فوریه کشف خارق‌العاده‌ای را به ارمغان آورد. فوریه در نتیجه تحقیقات‌اش بر روی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که ارتعاشات و انتشار گرما در اجسام را مدل‌سازی می نمود، ادعا داشت که هر تابعی را می‌توان توسط یک سری بی‌نهایت از توابع مثلثاتی ابتدایی مانند سینوس‌ها و کسینوس‌ها معرفی نمود. برای مثال، صدای حاصل از یک آلت موسیقی مانند پیانو، ویولن یا رامپت، تجزیه سیگنال‌ها به تشکیل دهنده‌های مثلثاتی آنها که فرکانس‌های بنیادی را آشکار می سازد (یعنی آهنگ و فراز نواخت یا پژواک) از کاربردهای مهم سری فوریه می‌باشند.

ادعای فوریه آنقدر غیر قابل پیش بینی و شگفت انگیز بود که بسیاری از ریاضیدانان برجسته وقت به آن اعتقادی نداشتند. در عین حال، دیری نپائید که دانشمندانان به تحسین توانایی و گستردگی کاربرد روش فوریه زبان گشودند که سرآغاز فتح قلمروهای گوناگون فیزیک، مهندسی و تحلیل‌های ریاضی گردید.

تحلیل فوریه یکی از اجزاء بنیادین بسیاری از ریاضیات کاربردی مدرن محسوب می‌گردد. این سری، در حقیقت، یک وسیله تحلیلی استثنائی برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی را فراهم می‌سازد. کاربردهای آن در ریاضیات محض، فیزیک و مهندسی آنقدر گسترده می‌باشد که آنها را نمی-توان لیست نمود. به جرأت می توان ادعا نمود که در فرآیند کاری و تحقیقاتی یک ریاضیدان، فیزیکدان و یا مهندس، یادگیری تئوری فوریه، همانند حسابگان و جبر خطی، امری اجتناب ناپذیر می‌باشد و مطمئناً آنها به این نتیجه خواهند رسید که سری فوریه یکی از اصلی ترین اسلحه‌ها در زرّادخانه یک ریاضیدان یا یک دانش‌پژوه مهندسی می‌باشد.

۲-۲- لزوم استفاده از سری فوریه

۱- سری فوریه همانند سری تیلور، جهت برآورد استفاده می‌شود. از مزایای سری فوریه نسبت به سری تیلور، قابل استفاده بودن این سری برای تمام نقاط حوزه تعریف تابع مورد نظر می‌باشد[1]. در صورتی که سری تیلور تنها حول یک نقطه مشخص از دامنه تابع (که سری بر اساس آن نقطه نوشته شده است) معتبر می‌باشد[2].

---

[1] Global
[2] Local

بر خلاف سری تیلور که به واسطه چند جمله‌ایها[۳] بیان می‌شود، سری فوریه بر حسب ترکیب خطی از توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی بسط داده می‌شود.

۲- سری فوریه از ابزار سودمند جهت حل معادلات مشتقات پاره‌ای[۴] (PDE's) می‌باشد.

۳- جملات سری فوریه عموماً دارای تفسیر فیزیکی می‌باشند. برای مثال در سیستم ارتعاشاتی مکانیکی، هر یک از اجزای سری فوریه‌ای که بیانگر این ارتعاش کلی است، نشانگر مودهای اصلی[۵] این ارتعاش می‌باشد. سری فوریه کامل در حل این مسئله، نشان دهنده میزان تاثیر هر مود و تشخیص مودهای اساسی و تعیین کننده در سیستم مورد نظر می‌باشد. این اطلاعات می‌توانند راهنمای مناسبی برای نحوه به کارگیری مودهای ارتعاشی مورد نظر جهت حاصل شدن نتیجه مطلوب در سیستم باشند.

۲-۳- تعریف ریاضی سری فوریه

سری فوریه تابع $f(x)$ که در بازه $-L \leq x \leq +L$ تعریف شده باشد، به صورت رابطه (۲-۱) بسط داده می‌شود.

رابطه (۲-۱)
$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\, a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \; b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\right]$$

ضرایب فوریه a_0 ، a_n و b_n به صورت زیر و بر اساس خواص توابع متعامد[۶] (در ادامه به چندی از این خواص اشاره شده است) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

- با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲-۱) در بازه $[-L,+L]$ ضریب a_0 به فرم رابطه (۲-۲- الف) به دست خواهد آمد.

رابطه (۲-۲- الف)
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)dx$$

- ضریب a_n نیز با ضرب عبارت $cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ در طرفین رابطه (۲-۱) و انتگرال گیری در بازه $[-L,+L]$ به فرم رابطه (۲-۲- ب) بدست آورده می‌شود.

رابطه (۲-۲- ب)
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

---

[3] Polynomial
[4] Partial Differential Equation
[5] Fundamental Modes
[6] Orthogonality

- با ضرب عبارت $sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ در طرفین رابطه (۲-۱) و انتگرال گیری در بازه $[-L,+L]$، ضریب b_n به فرم رابطه (۲-۲- ج) به دست می‌آید.

رابطه (۲-۲- ج)
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

✓ از خواص تعامد روابط زیر را خواهیم داشت:

روابط (۲-۳)

(الف)
$$\int_{-L}^{+L} cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0$$

(ب)
$$\int_{-L}^{+L} cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ +L & m = n \end{cases}$$

(ج)
$$\int_{-L}^{+L} sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ +L & m = n \end{cases}$$

- دیگر روابط سودمند

(د)
$$\int_{-L}^{+L} cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0$$

(ه)
$$\int_{-L}^{+L} sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0$$

(و)
$$sin(A)\, sin(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$$

(ز)
$$sin(A)\, cos(B) = \frac{1}{2}[sin(A-B) - sin(A+B)]$$

(ح)
$$cos(A)\, cos(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) + cos(A+B)]$$

۲-۳-۱- استخراج روابط مربوط به ضرایب فوریه a_0، a_n و b_n

- استخراج رابطه (۲-۲- الف) به منظور محاسبه a_0 :

$$\int_{-L}^{+L} f(x)dx =$$
$$\int_{-L}^{+L} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-L}^{+L} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^{+L} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx\right] =$$

$$a_0L \;\Rightarrow\; a_0 = \int_{-L}^{+L} f(x)dx$$

- استخراج رابطه (۲-۲- ب) به منظور محاسبه a_n :

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{+L} f(x)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx &= \int_{-L}^{+L}\frac{a_0}{2}cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{+L}cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \right.\\ &\left. + b_n\int_{-L}^{+L}cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]\end{aligned}$$

با توجه به روابط (۲-۳- الف) و (۲-۳- د) ، رابطه بالا به فرم زیر مختصر می‌شود:

$$\int_{-L}^{+L} f(x)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{+L}cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

در اینجا دو حالت زیر وجود دارد.

۱- حالت $m \neq n$: با توجه به رابطه (۲-۳- ب) خواهیم داشت:

$$\int_{-L}^{+L}cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0$$

که مطلوب نمی‌باشد زیرا در بدست آوردن ضریب مورد نظر موثر نمی‌باشد.

۲- حالت $m = n$: در این حالت نیز با توجه به رابطه (۲-۳- ب) ، نهایتا رابطه (۲-۳- ب) استخراج می‌شود.

$$\int_{-L}^{+L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = a_n(+L) \;\;\Rightarrow\;\; a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

- استخراج رابطه (۲-۲- ج) به منظور محاسبه b_n :

مطابق مراحل ارائه شده در بخش استخراج رابطه (۲-۳- ب) ، می‌توان ضریب a_n را محاسبه نمود، با این تفاوت که می‌باید در طرفین رابطه (۲-۱) ، عبارت $sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ را ضرب نمود.

- **مثال (۱):** تابع $f(x) = x$ در بازه $-3 \le x \le +3$ مفروض است، مطلوب است:

(الف) سری فوریه تابع مورد نظر.

(ب) بسط سری مذکور تا جمله سوم $(F_3(x))$

➢ حل:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{+3} xdx = \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\begin{cases}+3\\-3\end{cases} = \frac{1}{6}(9-9) = 0 \;\Rightarrow\; a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{+3} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{+3} x\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx$$

با به کارگیری روش جزءبه‌جزء خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u = x \\ du = dx \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} dv = \cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx \\ v = \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad a_n &= \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\begin{cases}+3\\-3\end{cases} - \frac{3}{n\pi}\int_{-3}^{+3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{9}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\begin{cases}+3\\-3\end{cases}\right] \\ &= \frac{3}{(n\pi)^2}[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] \quad\Rightarrow\quad a_n = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{+3} x\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx \quad \text{و} \quad \begin{cases} u = x \\ du = dx \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} dv = \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx \\ v = -\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{3}\left[-\frac{3x}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\Big\{_{-3}^{+3} + \frac{3}{n\pi}\int_{-3}^{+3} cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx\right]$$
$$= -\frac{1}{n\pi}[3\,cos(n\pi) + 3cos\,(-n\pi)] = -\frac{1}{n\pi}[6cos\,(n\pi)]$$
$$= -\frac{6(-1)^n}{n\pi} \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(الف) $$F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\right]$$

(ب) $$F_3(x) = \frac{6}{\pi}\left[\frac{(-1)^2}{1}sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{(-1)^3}{2}sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + \frac{(-1)^4}{3}sin\,(\pi x)\right]$$

یا به عبارتی:

$$F_3(x) = \frac{6}{\pi}\left[sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{1}{2}sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + \frac{1}{3}sin\,(\pi x)\right]$$

- **مثال (۲):** بسط تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ به فرم سری فوریه بدست آورید.

➢ حل:

با توجه به آن که $L = \pi$ می باشد، سری فوریه به فرم زیر تبدیل می‌گردد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\,a_n\,cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) + \;b_n\,sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)\right]$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,cos(nx) + b_n sin\,(nx)]$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\pi}(\pi - x)dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi x\Big\{_{-\pi}^{+\pi} - \frac{x^2}{2}\Big\{_{-\pi}^{+\pi}\right] \Rightarrow \; a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\, cos(nx)\, dx + \int_{0}^{+\pi}(\pi - x)\, cos(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(\pi - x)\, cos(nx)\, dx \;\; \text{و} \;\; \begin{cases} u = \pi - x \\ du = -dx \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} dv = cos(nx)dx \\ v = \frac{1}{n} sin(nx) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi - x}{n} sin(nx) \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases} + \frac{1}{n}\int_{0}^{+\pi} sin(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx) \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases}\right] \Rightarrow \; a_n = \frac{1}{n^2\pi}[1 - (-1)^n]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\, sin(nx)\, dx + \int_{0}^{+\pi}(\pi - x)\, sin(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\pi}(\pi - x)\, sin(nx)\, dx \quad \text{و} \quad \begin{cases} u = \pi - x \\ du = -dx \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} dv = sin(nx)dx \\ v = -\frac{1}{n} cos(nx) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi - x}{n} cos(nx) \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases} - \frac{1}{n}\int_{0}^{+\pi} cos(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-(\pi - x) cos\,(nx) \begin{cases} +\pi \\ 0 \end{cases}\right] \qquad \Rightarrow b_n = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\right) cos(nx) + \frac{1}{n} sin\,(nx)\right]$$

۲-۳-۲- توابع زوج و فرد

نتایج حاصله از حل مثال(۱) در خصوص ضرائب a_0 و a_n را می توان از خواص توابع زوج و فرد نیز بدست آورد.

یادآوری (از مباحث مقدماتی ریاضی):

الف) تابع $f(x)$ زوج می‌باشد $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$. این تابع نسبت به محور عمودی (yها) متقارن می‌باشد.

ب) تابع $f(x)$ فرد می‌باشد $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$. این تابع نسبت به مبداء مختصات متقارن می‌باشد.

ج) در صورتی که تابع $f(x)$ در بازه $[-L,+L]$ فرد باشد $\Leftarrow$ $\int_{-L}^{+L} f(x)dx = 0$

د) چنانچه تابع مورد نظر در بازه مفروض زوج باشد $\Leftarrow$ $\int_{-L}^{+L} f(x)dx = 2\int_{0}^{+L} f(x)dx$

بنابراین در مثال (۱)، $f(x)$ و $f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ هر دو فرد می‌باشند و انتگرال‌های معین مربوط به محاسبه ضرائب a_0 و a_n (همان طور که از حل مسئله بدست آمد) بر روی بازه $[-L,+L]$ برابر با صفر می‌شود و در فرآیند حل مسئله دیگر نیاز به محاسبه این دو ضریب نمی‌باشد

قواعد مهم:

۱- تابع زوج در بازه $[-L,+L]$ تنها دارای جملات مثلثاتی کسینوسی در سری فوریه خواهد بود. که به نام سری کسینوسی فوریه معروف می‌باشد.

۲- تابع فرد در بازه $[-L,+L]$ تنها دارای جملات مثلثاتی سینوسی در سری فوریه خواهد بود. که به نام سری سینوسی فوریه معروف می‌باشد.

تذکر:

۱- بسیاری از توابع نه زوج و نه فرد هستند. مانند: x^3+x^2 , e^x و ...

۲- رفتار زوج و فرد در ارتباط با توابع همانند مثبت و منفی در اعداد طبیعی می‌باشد. (تابع فرد را منفی و تابع

زوج را مثبت در نظر می‌گیریم). لذا روابط زیر را خواهیم داشت:

- زوج × زوج ⇐ زوج
- فرد × فرد ⇐ زوج
- زوج × فرد ⇐ فرد
- زوج ± زوج ⇐ زوج
- فرد ± فرد ⇐ فرد

- **مثال (۳):** در ارتباط با سری فوریه توابع زیر چه می توان گفت؟

الف) $f(x) = xsin(x)$

ب) $f(x) = x^2\sin(x)$

➢ حل:

(الف) توابع x و $sin\ (x)$ هر دو فرد هستند پس مضرب آنها یعنی تابع $xsin(x)$ زوج می‌باشد. با توجه به قواعد ذکر شده $b_n = 0$ و سری فوریه تنها شامل جملات کسینوسی می‌باشد.

(ب) تابع x^2 زوج و $sin\ (x)$ فرد است لذا مضرب آنها یعنی $x^2 sin\ (x)$ فرد می‌باشد. با توجه به قواعد ذکر شده $a_n = 0$ و $a_0 = 0$ و سری فوریه تنها شامل ترمهای سینوسی می‌باشد.

- **مثال (٤):** سری فوریه تابع $f(x) = x^4$ در بازه $[-3, +3]$ را به دست آورید.

➢ حل:

$پریود = p = 3$

از آنجائیکه f(x) یک تابع زوج است، تابع $x^4 \sin\ (\frac{n\pi x}{3})$ فرد می‌باشد. به همین دلیل کلیه ضرایب سینوسی b_n باید صفر باشند. برای دیگر ضرایب خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 x^4$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x^4 \cos$$

$$f(x) = \frac{162}{10}$$

- **مثال (٥):** مفروض بر اینکه $f(x) = x^3$ تابع متناوب بر روی بازه $[-3, +3]$ باشد، سری فوریه آن را به دست آورید.

➢ حل:

$پریود = p = 3$

از آنجا که $f(x)$ و $f(x) cos\ (\frac{n\pi x}{3})$ هر دو فرد می‌باشند، ضرایب a_0 و a_n صفر بوده و ضریب سینوسی آنها یعنی b_n عبارت است از:

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x^3 \sin$$

- **مثال (٦):** سری فوریه تابع متناوب $f(x) = x - 1$ در بازه $[-\pi, +\pi]$ را به دست آورید.

➢ حل:

تابع $f(x) = x - 1$ نه زوج و نه فرد است ، بنابراین سری فوریه آن به شکل زیر می‌باشد:

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,]$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(x-1)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\begin{cases}+\pi\\-\pi\end{cases} - x\begin{cases}+\pi\\-\pi\end{cases}\right] \quad \Rightarrow \quad a_0 = -2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(x-1)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}(x)\cos(nx)\,dx - \int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,dx\right] \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,dx \;\Rightarrow\; a_n = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(x-1)\sin(nx)\,dx \quad \text{و} \quad \begin{cases}u = x-1\\du = dx\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}dv = \sin(nx)dx\\v = -\frac{1}{n}\cos(nx)\end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x-1}{n}\cos(nx)\begin{cases}+\pi\\-\pi\end{cases} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\,dx\right] \\ &= -\frac{1}{n\pi}[(\pi-1)\cos(n\pi) - (-\pi-1)\cos(n\pi)] \\ &+ \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{n}\right)\sin(nx)\begin{cases}+\pi\\-\pi\end{cases} \;\Rightarrow b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

پس سری سینوسی حاصل عبارت است از:

$$F_n(x) = -\frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} sin(nx) \Rightarrow F_n(x)$$
$$= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} sin\,(nx)$$

۲-٤- همگرایی سری فوریه

تئوریهای همگرایی در سری فوریه پیچیده و در برخی موارد غیر کاربردی می‌باشند. در این مبحث به ارائه تئوری همگرایی ریاضیدان آلمانی، دیریکله[7] پرداخته شده است. این تئوری شرایط کافی جهت همگرایی سریهای فوریه در یک نقطه را، در اختیار قرار می‌دهد. این شرایط بر تکه‌ای هموار بودن تابع تاکید دارد.

تعریف:

توابع تکه‌ای پیوسته: درصورتی که تابع $f(x)$ در بازه $[-\mathrm{L}, +\mathrm{L}]$ (به استثنای نقاط متناهی متعلق به بازه مذکور) تعریف شده باشد، به آن تابع تکه ای پیوسته بر روی بازه $[-L,+L]$ می گویند در صورتی که:

۱- تابع $f(x)$ بر روی بازه $[-L, +L]$ تعریف شده و پیوسته باشد، به غیر از احتمالاً نقاط متناهی متعلق به بازه مورد نظر.

۲- هر دو رابطه $\lim_{x\to+L^-} f(x)$ (حد چپ در $x = +L$) و $\lim_{x\to-L^+} f(x)$ (حد راست در $x = -L$) موجود و مقداری مشخص باشند.

۳- در تمامی نقاطی که تابع $f(x)$ پیوسته نیست (مانندx_0)، دو رابطه $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ و $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ موجود و مقداری مشخص باشند.

توابع تکه‌ای هموارتابع $f(x)$ را در بازه $[-L, +L]$ تکه‌ای هموار گویند، در صورتی که تابع $f(x)$ و $f'(x)$ در بازه $[-L, +L]$ تکه‌ای پیوسته باشند.

---

[7] P.G.L.Drichlet

- **مثال (۷):** تابع $f(x)=\begin{cases}1 & -4\le x\le 1\\ -2x & 1\le x\le 2\\ 9e^{-x} & 2\le x\le 3\end{cases}$ را از لحاظ پیوستگی بررسی نمایید.

➢ حل

این تابع به غیر از نقاط $x=1$ و $x=2$ ، در دامنه خود پیوسته است. تابع در نقاط مذکور دارای ناپیوستگی پرشی (رفع شدنی) می‌باشد. در نتیجه تابع $f(x)$ در بازه $[-4,3]$ تکه ای پیوسته می‌باشد.
با مشتق گیری از تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$f($

تابع مشتق نیز در تمامی نقاط بازه $[-4,3]$ پیوسته می‌باشد به استثنای نقاط $x=1$ و $x=2$ ، که مشتق علی رقم دارا بودن حدود چپ و راست در این نقاط، تعریف شده نمی‌باشد. پس $f'(x)$ نیز در بازه مورد نظر تکه‌ای پیوسته و در نتیجه تابع $f(x)$ در بازه $[-4,3]$ تکه‌ای هموار می‌باشد.

- **مثال(۸):** تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x=-3\\ -x & -3<x\le -1\\ x^2+1 & 1<x<2\\ 0 & 2\le x\le +3\end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشخص کنید که این تابع تکه‌ای پیوسته و همچنین تکه‌ای هموار می‌باشد.

➢ حل

جهت اثبات تکه‌ای هموار بودن، تابع $f'(x)$ را بدست آورده و برای تحقیق در تکه‌ای پیوسته بودن آن، چنانچه حدود چپ و راست تابع $f'(x)$ را در نقاط ناپیوستگی آن (یعنی نقاط $x=-1$ و $x=2$) محاسبه نماییم، مشاهده می‌شود که حدود مذکور موجود و متناهی می‌باشند.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=-3\\ -1 & -3<x\le -1\\ 2x & 1<x<2\\ 0 & 2\le x\le +3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +3^-} f'(x)=0 \qquad , \qquad \lim_{x\to -3^+} f'(x)=-1$$

بنابراین $f'(x)$ تکه‌ای پیوسته و در نتیجه تابع $f(x)$ تکه‌ای هموار می‌باشد.

۲-٤-۱- تئوری اول همگرایی

اگر تابع $f(x)$ در بازه $[-L,+L]$ تکه‌ای هموار باشد، سری فوریه تابع $f(x)$ در هر نقطه مانند x متعلق به بازه $[-L,+L]$ با حاصل رابطه(۲-۴) همگرایی دارد.

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$$ رابطه (۲-۴)

تذکر:

۱- حد راست[۱] تابع $f(x)$ در نقطه $x=c$ را با عبارت $f(c^+)=\lim_{x\to c^+} f(x)$ نمایش می‌دهند.

۲- حد چپ[۱] تابع $f(x)$ درنقطه $x=c$ را با عبارت $f(c^-)=\lim_{x\to c^-} f(x)$ نمایش می‌دهند.

نتایج:

۱- اگر تابع $f(x)$ در نقطه X پیوسته باشد ، در آن صورت سری فوریه آن به $f(x)$ همگراست.

۲- در صورتیکه در نقطه X پیوسته نباشد، در آن صورت سری فوریه آن به میانگین حدود راست و چپ تابع در نقطه X همگرا می باشد.

- **مثال(۹):** در ارتباط با تابع مثال(۸)، ثابت کنید که سری فوریه آن در بازه $(-3,+3)$ به عبارات زیر همگرا می‌باشد.

حل:

(الف) $-3<x<-1$: تابع $f(x)$ پیوسته است و سری فوریه آن به $f(x)=-x$ همگرا می‌باشد.

ب) $x = -1$: تابع $f(x)$ دارای ناپیوستگی پرشی (رفع شدنی) و سری فوریه آن به میانگین حدود چپ و راست تابع در $x = -1$ ، همگرا می‌باشد.

$$\begin{cases} f(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-x) = +1 \\ f(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1) = +2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}[f(-1^+) + f(-1^-)] = \frac{3}{2}$$

ج) $-1 < x < 2$: تابع $f(x)$ پیوسته است و سری فوریه آن به $f(x) = x^2 + 1$ همگرا می-باشد.

د) $x = 2$: مشابه موارد ذکر شده در مورد (b) ، سری فوریه همگراست به :

$$\begin{cases} f(2^-) = (2 \\ f(2^+) = 0 \end{cases}$$

ه) $2 < x < 3$: تابع $f(x)$ پیوسته است و سری فوریه آن به $f(x) = 0$ همگرا می‌باشد.

تذکر:
در ارتباط با ناپیوستگی تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی در ادامه صحبت خواهد شد.

توجه:
تئوری اول همگرایی، بحثی اشاره‌ای به نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نمی‌کند. برای بررسی این موضوع تئوری دوم همگرایی مطرح می‌شود.

۲-٤-۲- تئوری دوم همگرایی:

تابع $f(x)$ را بر بازه $[-L, +L]$ تکه ای پیوسته در نظر می گیریم:

۱- اگر تابع $f(x)$ در هر x متعلق به بازه $(-L, +L)$ دارای هر دو مشتق راست و چپ در نقطه x باشد، سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $[-L, +L]$ به عبارت زیر همگراست.

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

۲- اگر $f'_R(-L)$ و $f'_L(+L)$ هر دو موجود باشند، سری فوریه در نقاط $x=+L$ و $x=-L$ به عبارت زیر همگرا می باشد.

$$[f(-L^+) + f(+L^-)] \qquad \text{رابطه (۲-۵)}$$

نکات مهم:

۱- در تئوری دوم همگرایی بر خلاف تئوری اول، دیگر احتیاج به تکه‌ای هموار بودن تابع $f(x)$ نمی‌باشد.

۲- تئوری اول همگرایی نقاط ابتدایی و انتهایی بازه ($x = +L$ و $x = -L$) را مشخص نمی‌نمود.

۳- مقدار سری فوریه تابع $f(x)$ در بازه $[-L, +L]$ وابسته به مقدار مشتقات چپ و راست تابع در نقاط $x = +L$ و $x = -L$ نمی‌باشد.

- **مثال(۱۰):** اکنون می‌توانیم همگرایی سری فوریه تابع مثال (۸) را در نقاط ابتدایی و انتهایی مشخص نماییم و تحلیل سری فوریه آن را تکمیل کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = -3 \\ -x & -3 < x \leq -1 \\ x^2 + 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 \leq x \leq +3 \end{cases}$$

➢ حل

مقادیر مشتق راست و چپ را به ترتیب در نقاط ابتدا و انتهای بازه، مشخص می‌نماییم:

$$f'_R(-3) = -1 \quad , \quad f'_L(+3) = 0$$

با توجه به اینکه مشتقات فوق موجودند و بر اساس مطالب ذکر شده در مثال (۷)، می‌توان بیان نمود که سری فوریه تابع مورد نظر به عبارات زیر در بازه‌های مشخص شده، همگراست.

$$\begin{cases} \frac{3}{2} & \mathrm{x} = -3 \\ -\mathrm{x} & -3 < \mathrm{x} < -1 \\ \frac{3}{2} & \mathrm{x} = -1 \\ \mathrm{x}^2 + 1 & -1 < \mathrm{x} < 3 \\ \frac{5}{2} & \mathrm{x} = 2 \\ 0 & 2 < \mathrm{x} < 3 \\ \frac{3}{2} & \mathrm{x} = 3 \end{cases}$$

۲-۵- سری فوریه سینوسی و کسینوسی

تا به حال ما سری فوریه توابعی را بدست آوردیم که یا متناوب بودند و یا در بازه $[-L,+L]$ با نقطه میانی مبداء مختصات تعریف شده بودند.

برخی از پدیده‌های فیزیکی مانند دمای اولیه در یک میله، که تنها در بازه $0 \le x \le +L$ تعریف می‌شوند، به وسیله سریهای مثلثاتی بیان می‌شوند. جهت دست‌یابی به این سریها نیاز است تابع مورد نظر را در نیمه دیگر بازه $(-L \le x \le 0)$ بسط دهیم. این کار به چند طریق زیر قابل اجرا می‌باشد:

۱- بسط زوج یا کسینوسی:

این بسط، تابع را به یک تابع زوج و متقارن نسبت به محور yها در بازه $[-L,+L]$ تبدیل می‌نماید. با توجه به موارد ذکر شده در بخش (۲-۲) در خصوص سری فوریه توابع زوج و فرد، می‌توان سری فوریه تابع حاصل را بدست آورد. سری فوریه بدست آمده یک سری کسینوسی فوریه می‌باشد.

۲- بسط فرد یا سینوسی:

با اعمال این بسط تابع به تابع فرد در بازه $[-L,+L]$ تبدیل می‌شود که متقارن نسبت به نقطه مبداء مختصات می‌باشد. سری فوریه حاصل یک سری سینوسی فوریه می‌باشد.

۳- تکرار تابع اصلی

در این حالت در بازه $-L \le x \le 0$ دقیقا تابع را همانگونه که در بازه $0 \le x \le +L$ تعریف شده است، تعریف می‌نماییم. با این کار به سری فوریه کامل تابع (حاوی جملات سینوسی و کسینوسی) خواهیم رسید.

در ادامه به بررسی هر کدام از حالت های ذکر شده می‌پردازیم.

۲-۵-۱- سری کسینوسی فوریه تابع (بسط زوج یا کسینوسی تابع)

در صورتیکه تابع $f(x)$ در بازه $[-L,+L]$ به صورت تابعی زوج بسط داده شود، (یعنی در بازه $-L \le x \le 0$ ، $f(-x) = f(x)$ باشد)، می‌توان تابعی زوج مانند $g(x)$ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) & -L \le x \le 0 \\ f(x) & 0 \le x \le +L \end{cases}$$

از آنجایی که تابع $g(x)$ زوج می باشد، ضریب b_n در سری فوریه برابر با صفر می‌باشد و سری فوریه در بازه $[-L,+L]$ به فرم زیر بدست می‌آید.

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن:

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad , \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad و \quad n=1,2,3,\dots$$

- **مثال(۱۱):** تابع $f(x)=x^2$ ، $0\le x\le +L$ ، را به صورت سری کسینوسی بسط دهید.

➢ حل

تابع $f(x)=x^2$ با بسط کسینوسی دارای سری فوریه زیر می‌باشد:

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن:

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{2}{L}\left(\frac{x^3}{3}\begin{cases}L\\0\end{cases}\right)=\frac{2}{3}L^2$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\cdots=\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n$$

و نهایتا سری فوریه:

$$f(x)=\frac{L^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(n\pi)^2}(-1)^n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

۲-۵-۲- سری سینوسی فوریه تابع (بسط فرد یا سینوسی تابع)

چنانچه تابع $f(x)$ در بازه $[-L,+L]$ به صورت تابعی فرد بسط داده شود، (یعنی در بازه $-L\le x\le 0$ ، $f(-x)=-f(x)$ باشد) می توان تابعی فرد مانند $g(x)$ را به صورت زیر تعریف نمود.

$$g(x)=\begin{cases}-f(-x) & -L\le x\le 0\\ f(x) & 0\le x\le +L\end{cases}$$

از آنجایی که تابع $g(x)$ فرد می‌باشد، ضرایب a_n , a_0 در سری فوریه برابر با صفر می‌باشد و سری فوریه در بازه $[-L,+L]$ به فرم زیر بدست می‌آید:

$$F_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

- **مثال(۱۲) :** تابع $f(x)=x^2$, $0\le x\le +L$ را به صورت سری سینوسی بسط دهید.

➢ حل

تابع $f(x)=x^2$ به دلیل زوج بودن، اکنون با بسط سینوسی دارای سری فوریه زیر می‌باشد:

$$F_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

که در آن:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^L x^2 sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\cdots$$
$$=\frac{2\mathrm{L}^2(-1)^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}\pi}+\frac{4\mathrm{L}^2}{(\mathrm{n}\pi)^3}[(-1)^{\mathrm{n}}-1]$$

در نهایت، سری سینوسی فوریه برابر است با:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{4L^2}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\right]sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

۲-۵-۳- سری فوریه کامل تابع (با دوره تناوب فرضی L)

در مباحث قبلی زمانی که تابع $f(x)$ در بازه $[-P,+P]$ متناوب و با دوره تناوب $2P$ بود، سری فوریه و ضرایب آن به صورت زیر تعریف می‌شد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\,a_n\cos\left(\frac{n\pi}{P}x\right)+\ b_n\sin\left(\frac{n\pi}{P}x\right)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{P}\int_{-P}^{+P}f(x)dx \quad \text{و} \quad a_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{+P}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{P}x\right)dx$$

$$\text{و} \quad b_n=\frac{1}{P}\int_{-P}^{+P}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{P}x\right)dx$$

حال اگر تابع $f(x)$ تنها در بازه $(0\le x\le L)$ تعریف شده باشد. دوره تناوب را L فرض می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$P=\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}=\frac{2}{L} \qquad , \qquad \frac{n\pi}{P}=\frac{n\pi}{\left(\frac{L}{2}\right)}=\frac{2n\pi}{L}$$

سپس سری فوریه و ضرایب آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\,a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)+\ b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_{0}^{+L}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{+L}f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)dx \quad \text{و} \quad b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{+L}f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)dx$$

- **مثال(۱۳):** بسط کامل فوریه تابع $0\le x\le +L \ , \ f(x)=x^2$ را بدست آورید.

➢ حل

فرض بر آن است که تابع مورد نظر، تابعی متناوب با دوره تناوب L می‌باشد. با توجه به روابط ارائه شده در بالا، ضرایب سری فوریه به صورت زیر می‌باشد:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{+L} x^2 dx = \frac{2}{L}\left(\frac{x^3}{3}\Big\{_0^L\right) = \frac{2}{3}L^2 \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^{+L} x^2 \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = \frac{L^2}{(n\pi)^2}$$

$$\text{و} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^{+L} x^2 \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = -\frac{L^2}{n\pi}$$

نهایتا سری فوریه به صورت زیر بدست می آید:

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) - \frac{L^2}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]$$

- چند نکته در ارتباط با همگرایی سری فوریه تابعی که در بازه $[0, L]$ به صورت متناوب تعریف شده است:

(الف) سری کسینوسی فوریه

سری فوریه در تمام نقاطی که مضارب صحیحی از L $(-2L, -L, +L, +2L)$باشند، به$f(x)$ همگرا است. نقاط انتهایی و نقاطی که در آن ها تابع دارای ناپیوستگی پرشی باشد نیز مانند قبل، مقدار تابع در این نقاط، میانگین حدود چپ و راست می‌باشد.

(ب) سری سینوسی فوریه

این سری در تمامی نقاط به غیر از نقاطی که مضارب صحیحی از L $(-2L, -L, +L, +2L)$ می‌باشند، به $f(x)$ همگرا است و در نقاط مذکور $(-2L, -L, +L, +2L)$ به صفر همگرا می-باشد.

تحلیل علت همگرایی به صفر سری فوریه در نقاط مورد نظر:

$$x = mL \quad (m = 1,2,3, \dots) \quad , \quad f(L^-) = -f(L^+)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[f(L^-) + f(L^+)] = \frac{1}{2}[-f(L^+) + f(L^+)] = 0$$

(ج) سری فوریه کامل

این سری به چگونگی $f(L^-)\,,f(L^+)$ بستگی دارد. سری فوریه در این حالت در تمامی نقاط به غیر از نقاطی که مضارب صحیحی از L $(-2L,-L,+L,+2L)$ می‌باشند، به $f(x)$ همگراست و در نقاط مذکور $(-2L,-L,+L,+2L)$ به عبارت زیر همگرا می‌باشد:

$$\frac{1}{2}[f(L^-)+f(L^+)]$$

- **مثال(۱٤):** سری فوریه تابع $f(x)=x-x^2$ را بر روی بازه $[-\pi,\pi]$ به دست آورید. با استفاده از نتیجه حاصل روابط زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

ب) $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

➢ حل

$$f(x) =$$

$$a_0 =$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2$$

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{3} +$$

الف) با جایگزینی نقطه انتهایی $x=\pi$ سری فوریه به کمیت ذیل همگرایی خواهد داشت:

$$\frac{f(\pi)+}{2}$$

بنابراین سری فوریه به صورت زیر در خواهد آمد:

$-\pi^2 =$

پس

$-\frac{2\pi^2}{3} = -4\Big[-$

و نتیجه می‌گیریم که :

ب) با جایگزینی $x = 0$ در سری فوریه خواهیم داشت:

$0 =$

در نتیجه

$\frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}$

تمرینات فصل دوم

در هر یک از مسائل ۱ تا ۱۲ سری فوریه تابع را بر روی بازه داده شده به دست آورید.

۱- $f(x) = -x \quad , -1 \le x \le 1$

۲- $f(x) = cosh\,(\pi x) \quad , -1 \le$
$x \le 1$

۳-

۷- $f(x) = e^x \quad , -\pi \le x \le \pi$

۸- $f(x) = 1 - |x| \quad , -2 \le x \le 2$

۹- $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\,(x) \quad , -\pi \le$

$x \le \pi$

۱۰-

۱۱- $f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le 1 \end{cases}$

۱۲- $f(x) = \begin{cases} -x & -5 \le x \le 0 \\ 1+x^2 & 0 < x \le 5 \end{cases}$

۴-

۵- $f(x) = x^2 - x + 3 \quad , -2 \le x \le 2$

۶-

در هر یک از مسائل ۱۳ تا ۲۲ سری فوریه تابع را بر روی بازه داده شده به دست آورید.

۱۳- $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x \le 3 \\ -1 & 3 < x \le 5 \end{cases}$

۱۴- $f(x) = \begin{cases} 4x & 0 < x \le 2 \\ -3 & 2 < x < 4 \\ 1 & 4 \le x \le 7 \end{cases}$

۱۵- $f(x) = \begin{cases} cosx & 0 < x \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

۱۶- $f(x) = x\, sinx \quad 0 \le x \le 2$

۱۷- $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2 \\ 2-x & 2 < x < 3 \end{cases}$

۱۸- $f(x) = x(\pi - x) \quad 0 < x < 2$

۱۹- $f(x) = Lx - x^2 \quad 0 < x < L$

۲۰- $f(x) = \begin{cases} Kx & 0 < x < L/2 \\ K(L-x) & L/2 < x < \pi \end{cases}$

۲۱- $f(x) = \sin(3x) \quad 0 \le x \le \pi$

۲۲- $f(x) = 1 - x^3 \quad 0 \le x \le 2$

۲۳- جمع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)}$ را محاسبه نمایید. راهنمایی: تابع $sin(x)$ را بر روی بازه $[0, \pi]$ به صورت سری فوریه کسینوسی بسط دهید و کمیت مناسب x را انتخاب کنید.

۲۴- بسط فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ x/2 & 0 < x \le \pi \end{cases}$ را به دست آورده و به کمک آن حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2n^2}$ را محاسبه نمایید.

۲۵- بسط فوریه تابع $f(x) = x^2 \;, \pi \le x \le \pi$ را به دست آورده و به کمک آن حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را محاسبه نمایید.

در هر یک از مسائل ۲۶ تا ۳۵ با استفاده از تئوری همگرایی نشان دهید تابع $f(x)$ بر روی بازه مشخص شده به چه کمیت یا تابعی همگرایی دارد. ثابت کنید پیشنیاز آن ارضا شده است. سپس سرس فوریه تابع را به دست آورده و منحنی $f(x)$ را برای $N=5,10,20$ در کنار منحنی خود تابع رسم نمایید.

۲۶- $f(x)=\begin{cases} -x^2 & -3\le x<1 \\ 1+x^2 & 1<x\le 3 \end{cases}$

۲۷- $f(x)=\begin{cases} -3x & -\pi<x\le 0 \\ 5 & 0<x\le \pi \end{cases}$

۲۸- $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & -2\le x<1 \\ -2x^2 & 1\le x<2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$

۲۹- $f(x)=e^{x} \quad -1\le x\le 1$

۳۰- $f(x)=\begin{cases} -\pi/4 & -\pi\le x<0 \\ 0 & x=0 \\ \pi/4 & 0<x\le \pi \end{cases}$

۳۱- $f(x)=\begin{cases} \cos x & -2\le x<0 \\ \sin x & 0\le x\le 2 \end{cases}$

۳۲- $f(x)=\begin{cases} \cos(\pi x) & -1\le x<0 \\ \sin x & 0\le x\le 1 \end{cases}$

۳۳- $f(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x<1/2 \\ 1 & 1/2\le x\le 3/4 \\ 1/2 & 3/4<x\le 1 \end{cases}$

۳۴- $f(x)=e^{-|x|} \quad -\pi\le x\le \pi$

۳۵- $f(x)=|x| \quad -5\le x\le 5$